ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1982
*****

MATHEMATIQUES I
(2 pages dactylographiées)

TA

Dans tout le problème, le symbole ln x désigne le logarithme népérien de x, et e désigne la base des logarithmes népériens.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

a) Etablir, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

b) Démontrer que, pour tout couple d'entiers (k,n) tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k} \leqslant e$$

c) Démontrer que, pour tout x réel, on a :

$$e^{x} - 1 \leqslant x\, e^{x}$$

d) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\ln (n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$$

On pose désormais, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout x réel différent de 1 :

$$f_n(x) = \ln |x-1| + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

Ainsi, $f_1(x) = \ln |x-1| + x$, $f_2(x) = \ln |x-1| + x + \frac{x^2}{2}$, etc...

1.a) Etudier selon les valeurs de n, les variations de la fonction f_n et construire la courbe représentative de f_n en repère orthonormé. On précisera la concavité, on donnera l'abscisse des points d'inflexion éventuels ; on étudiera, pour chaque branche infinie, la direction asymptotique et l'asymptote éventuelle.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un réel non nul unique α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$. Etablir que : $1 < \alpha_n < 1 + \frac{1}{n+1}$

c) Etablir, pour tout $x < 1$, l'égalité : $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{t-1} dt$

Donner de même, pour $x > 1$, une formule exprimant $f_n(x)$ sous forme d'une intégrale.

2. Dans cette question, on étudie, pour $x \neq 1$ fixé, la suite qui à tout entier $n \geqslant 1$ associe $f_n(x)$.

a) Quelle est la limite de cette suite si $x > 1$?
b) Quelle est la limite de cette suite si $0 \leqslant x < 1$?
c) Quelle est la limite de cette suite si $-1 \leqslant x \leqslant 0$?
d) Etudier le comportement de cette suite si $x < -1$.

3. On fixe $a \in]0,1[$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur le segment $[-1,a]$.

.../...

4.a) Quelle est la dérivée de la fonction F_n qui à $x \neq 1$ associe :

$$(x-1)\, f_n(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad ?$$

b) Calculer $u_n = \int_0^1 f_n(t)\, dt$; on justifiera au préalable l'existence de u_n. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?

c) Soit $v_n = \int_{-1}^0 f_n(t)\, dt$; justifier l'existence de cette intégrale ; la calculer en fonction de $f_n(-1)$.
Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$?

d) Soit $w_n = \int_1^{\alpha_n} f_n(t)\, dt$; justifier l'existence de cette intégrale ; la calculer en fonction de α_n . Quelle est la limite de la suite $(W_n)_{n \geq 1}$?

5. Dans cette question on étudie de façon plus précise la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.

a) Quelle est la limite de cette suite ?

b) Donner une expression simple de $f_n(\alpha_{n+1})$ et de $f_{n+1}(\alpha_n)$. A l'aide de l'une des deux, trouver le signe de $\alpha_{n+1} - \alpha_n$.

c) Etablir la double inégalité :

$$(\alpha_n - \alpha_{n+1})\, f_n'(\alpha_n) < f_n(\alpha_n) - f_n(\alpha_{n+1}) < (\alpha_n - \alpha_{n+1})\, f_n'(\alpha_{n+1})$$

En déduire que l'on a : $\alpha_{n+1} - 1 < (\alpha_n - \alpha_{n+1})\,(n+1)$

En établissant une double inégalité analogue relative à la fonction f_{n+1}, démontrer l'inégalité : $\alpha_n - 1 > (\alpha_n - \alpha_{n+1})\,(n+1)$

d) On pose : $\alpha_n = 1 + \beta_n$. Démontrer que les suites $(n\,\beta_n)_{n \geq 1}$ et $((n+1)\beta_n)_{n \geq 1}$

convergent vers une même limite L, que l'on ne cherchera pas à évaluer.

e) Montrer qu'il existe un unique entier m tel que : $\alpha_{m+1} < 1{,}1 < \alpha_m$; le déterminer ; en déduire une valeur approchée de L à 0,1 près.

F I N

*****

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail